ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ 6

ΑΣΚΗΣΗ 3

i) Έστω $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$ και $f_3(x) = |x|$, $\forall x \in (-1,1)$

Να εξεταστεί αν οι συναρτήσεις είναι γραμμικά εξαρτημένες

ΛΥΣΗ

Ας είναι $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ $|c_1|+|c_2|+|c_3| \neq 0$

ώστε: $c_1 f(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) = 0$, $\forall x \in (-1,1)$

$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot |x| = 0$

~ για $x=0 \to c_1 = 0$

~ για $x = \frac{1}{2}$ ~> $c_2 \frac{1}{2} + c_3 \frac{1}{2} = 0$

~ για $x = -\frac{1}{2}$ ~> $-\frac{1}{2} c_2 + \frac{1}{2} c_3 = 0$

$\Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$

Άρα, γραμμ. ανεξάρτητες

Άσκηση Β-1 (ΛΥΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ)

Έστω $f:(0,+\infty)$ δεν μηδενίζεται σε n τουλάχιστον σημεία

ΝΔΟ οι συναρτήσεις

$f_k(x) = x^{k-1} \cdot f(x)$, $x \in (0,+\infty)$, $k = 1, \ldots, n$

είναι γραμμ. ανεξάρτητες

ΛΥΣΗ

Ας είναι $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ με $f(x_i) \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$

Ας είναι $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ με $c_1 f_1(x) + \ldots + c_n f_n(x) = 0$, $x \in (0,+\infty)$

Για $x = x_1, \ldots, x_n$ θα έχουμε n εξισώσεις δηλ. θα έχουμε ένα γραμμικό ομογενές σύστημα

$$c_1 \cdot f(x) + c_2 \cdot x f(x) + c_3 \cdot x^2 f(x) + \ldots + c_1 \cdot x^{n-1} f(x) = 0$$

Άρα, για $x = x_1, \ldots, x_n$ όπως προαναφέραμε:

$$\begin{cases} c_1 \cdot f(x_1) + c_2 x_1 f(x_1) + \ldots + c_n \cdot x_1^{n-1} f(x_1) = 0 \\ c_1 \cdot f(x_2) + c_2 \cdot x_2 f(x_2) + \ldots + c_n x_2^{n-1} f(x_2) = 0 \\ \vdots \\ c_1 f(x_n) + c_2 x_n f(x_n) + \ldots + c_n x_n^{n-1} \cdot f(x_n) = 0 \end{cases}$$

Είναι:

$$D = \begin{vmatrix} f(x_1) & x_1 f(x_1) & x_1^2 f(x_1) & \cdots & x_1^{n-1} f(x_n) \\ f(x_2) & x_2 f(x_2) & x_2^2 f(x_2) & \cdots & x_2^{n-1} f(x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(x_n) & x_n f(x_n) & x_n^2 f(x_n) & \cdots & x_n^{n-1} f(x_n) \end{vmatrix} =$$

$$= f(x_1) \cdot f(x_2) \cdots f(x_n) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

α' τρόπος

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \cdots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ 0 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 & \cdots & x_3^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \cdots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^2 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 & \cdots & (\ \ ) \\ 0 & 1 & x_3 + x_1 & \cdots & (\ \ ) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & x_n + x_1 & \cdots & (\ \ ) \end{vmatrix} = (x_2 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_1 + x_2 & \cdots & (\ \ ) \\ 0 & \vdots & \cdots & (\ \ ) \\ 0 & \vdots & \cdots & (\ \ ) \\ \vdots & & \cdots & (\ \ ) \\ 0 & x_1 + x_n & \cdots & (\ \ ) \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = \prod_{\substack{i \neq j \\ j, i = 1}}^{n} (x_i - x_j) \neq 0 \text{ απόδειξη Vandermode.}$$

Άρα, $D \neq 0$, Άρα, αφού το σύστημα ομογενές και $D \neq 0$ η μοναδική λύση που επιδέχεται είναι η μηδενική $(c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0)$

ΑΣΚΗΣΗ 3

iii) Εστω $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \log x$, $f_3(x) = \log x^2$, $x>0$
Να εξεταστει αν είναι γραμμικά εξαρτημένες

ΛΥΣΗ

Προφανως αφου $f_3(x) = \log x^2 = 2\log x$, $x>0$
δηλ. $f_3(x) = 2 \cdot f_2(x)$

Αρα,

$$0 \cdot f_1 - f_3 - 2f_2 = 0$$

άρα $C_1 = 0$ και $C_2 = -1$ και $C_3 = -2$.
Αρα, f_1, f_2, f_3 γραμ. εξαρτημένες.

Ασκηση (Β-26)

Εστω

$y'' + y = b(x)$, $x \geq 1$ b: συνεχής στο $[1, +\infty)$

$\rightsquigarrow$ i) Μια Μερική λυση $y_\mu(x) = \int_1^x \sin(x-t)\, b(t)\, dt$

ii) Αν $\int_1^\infty |b(x)|\, dx < \infty$ τότε κάθε λύση είναι φραγμένη.

ΛΥΣΗ

i) α' τρόπος: Λύνω την εξίσωση
β' τρόπος: Επαληθευω την εξίσωση

$y_\mu(x) = \int_1^x \sin(x-t)\, b(t)\, dt$ παραγωγίσιμη, διότι

η $\sin(x-t) \cdot b(t)$ συνεχής ως σύνθεση-πράξεις συνεχων (η $x-t$ συνεχής ως πράξεις συνεχων διότι x πολυωνυμική)

Αρα,

$$y_\mu'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_1^x \sin(x-t)\, b(t)\, dt\right] =$$

$$= \sin(x-x)\, b(x) + \int_1^x \frac{d}{dx}\left(\sin(x-t)\, b(t)\right) dt =$$

$$= \int_1^x b(t) \cdot \cos(x-t) \cdot 1\, dt$$

$$y''_\mu(x) = b(x)\cdot\cos(x-x) + \int_1^x b(t)\cdot(-\sin(x-t)\cdot 1)\,dt$$

$$= b(x) - \int_1^x \underbrace{\sin(x-t)\,b(t)\,dt}_{y_\mu(x)}.$$

ii) $|y_\mu(x)| = \left|\int_1^x \sin(x-t)\,b(t)\,dt\right| \leq$

$$\leq \int_1^x |\sin(x-t)|\cdot|b(t)|\,dt \leq \int_1^x |b(t)|\,dt \leq$$

$\leq \int_1^\infty |b(t)|\,dt$. Άρα, κάθε λύση φραγμένη